Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MSE

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour la plupart des spécialités, 3 pour Traitement des matériaux**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Probabilités, durée de vie et intervalle de confiance** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmse.fr/assets/annales/bts-mse/E2 - Mathématiques/2022/BTS MSE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction f du temps. Les questions mobilisent les équations différentielles, l'étude des variations, les développements limités, la tangente et le calcul d'une distance.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.**

La formule fournie dans le sujet donne les solutions de l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$ sous la forme $y(t) = Ke^{-at}$, où K est une constante réelle. Ici, le coefficient vaut $a = 0{,}8$. Il suffit donc de remplacer a par cette valeur dans la formule. La famille obtenue est définie sur l'intervalle demandé $[0; +[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = Ke^{-0{,}8t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **On définit g(t) = 5 sur [0 ; +∞[. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

La fonction est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient :

$$g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $t \geq 0$, la fonction g vérifie bien l'équation différentielle avec second membre 4.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : pour tout $t \geq 0$, $g'(t) + 0{,}8g(t) = 4$, donc g est une solution.

Question 1. c. **Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

On connaît une solution particulière de l'équation : $g(t) = 5$. Toute autre solution s'obtient en ajoutant à cette solution particulière une solution de l'équation homogène associée, résolue à la question précédente. Cette méthode donne la famille complète, avec une constante réelle arbitraire.

1. Solution particulière : 5.
2. Solution homogène : $Ke^{-0{,}8t}$.
3. On additionne les deux expressions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'ensemble des solutions est $y(t) = 5 + Ke^{-0{,}8t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale trouvée précédemment est $f(t) = 5 + Ke^{-0,8t}$. On applique la condition initiale à $t = 0$. Comme $e^0 = 1$, on obtient $f(0) = 5 + K = 20$, donc $K = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient l'expression recherchée. Elle vérifie bien la condition initiale et l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

La fonction exponentielle tend vers zéro lorsque son exposant tend vers $-\infty$. Or, lorsque $t \to +$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Ainsi, le terme exponentiel disparaît à la limite, tandis que le terme constant reste inchangé :

$$15e^{-0,8t} + 5 \longrightarrow 15 \times 0 + 5 = 5.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +$ est 5.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis donner une équation de cette asymptote.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à 5. On peut aussi constater directement que $f(t) - 5 = 15e^{-0,8t}$, qui tend vers zéro. Par définition, la courbe représentative admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$. Son ordonnée est la limite calculée à la question précédente.

1. Limite : 5.
2. Asymptote horizontale : $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe C admet en $+\infty$ l'asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

Question 2. **En admettant que f'(t) = -12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.**

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	5

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. L'expression admise pour la dérivée est donc strictement négative sur tout l'intervalle. La fonction est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$, sans atteindre cette limite.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +[$, f décroît strictement de 20 vers sa limite 5.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse doit devenir nulle à un instant de freinage. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. La vitesse est donc toujours supérieure à 5. La limite de la vitesse est 5, mais cette valeur n'est jamais atteinte à un temps fini.

- $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$.
- Le modèle ne prévoit aucun instant où $f(t) = 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle, car sa vitesse reste strictement supérieure à $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Question 4. a. **Pour F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme de $F(t) = -18{,}75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation de l'exponentielle composée, la dérivée du premier terme est $(-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0,8t}$, et celle du second est 5. Ainsi :

$$F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t).$$

La dérivée de F est donc bien la fonction f sur l'intervalle considéré.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Comme $F'(t) = f(t)$, F est une primitive de f sur $[0; +[$.

Question 4. b. **À l'aide de la formule de la distance d = ∫ de t₀ à t₁ f(t) dt, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1, donc $d = F(1) - F(0)$. En substituant dans la primitive donnée :

$$d = (-18{,}75e^{-0{,}8} + 5) - (-18{,}75) = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}.$$

Cette valeur exacte est en mètres. Son évaluation est environ $15{,}3251$ m ; l'arrondi au centimètre s'obtient en conservant deux chiffres après la virgule.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La distance exacte est $23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$ m, soit $15{,}33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : parmi les trois expressions proposées, choisir l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie sans justification. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.**

La consigne demande de recopier uniquement l'expression choisie, sans justification. Le calcul fourni dans le sujet affiche le polynôme régulier $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les trois propositions, seule la troisième reprend ce polynôme avec un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4{,}8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente en l'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. La valeur initiale donnée est $f(0) = 20$. D'après la dérivée indiquée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans la formule, on obtient l'équation demandée pour la tangente à C.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La tangente à C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 20 - 12t$.

2. Probabilités, durée de vie et intervalle de confiance

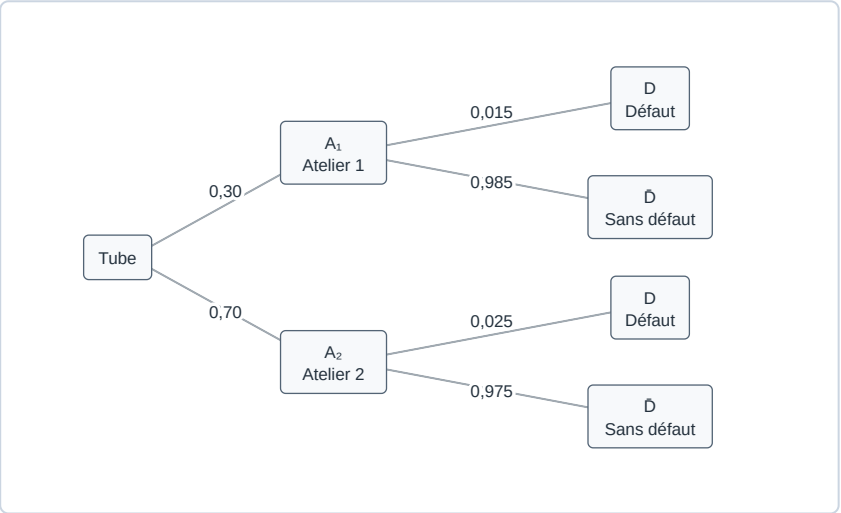
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents. L'exercice étudie aussi la durée de fonctionnement des tubes par une loi exponentielle et la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré représentant l'atelier d'origine du tube et la présence ou l'absence d'un défaut, à partir des données fournies.

Les premières branches distinguent les ateliers selon leur part de production. Depuis chaque atelier, on place le taux de défaut et son complément, qui correspond à l'absence de défaut. Les deux probabilités issues de chaque atelier ont donc pour somme 1.

Origine du tube et présence d'un défaut



Les probabilités conditionnelles de défaut et d'absence de défaut totalisent 1 pour chaque atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre : $P(A_1) = 0{,}30$; $P(A_2) = 0{,}70$; $P(D|A_1) = 0{,}015$; $P(\bar{D}|A_1) = 0{,}985$; $P(D|A_2) = 0{,}025$; $P(\bar{D}|A_2) = 0{,}975$.

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$, où A_1 désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 1 présentant un défaut se calcule en multipliant la part de production de cet atelier par son taux de défaut :

$$P(A_1 \cap D) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. À partir des données de production et des taux de défaut des deux ateliers, déterminer la probabilité P(D) qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut.

On additionne les probabilités de défaut venant des deux ateliers, qui couvrent toute la production :

Atelier	Calcul	Probabilité
1	0,30 × 0,015	0,0045
2	0,70 × 0,025	0,0175

La somme donne P(D) = 0,0045 + 0,0175 = 0,022.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(D) = 0,022, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche une probabilité conditionnelle. La probabilité qu'un tube vienne de l'atelier 2 et soit sans défaut vaut 0,70 × 0,975 = 0,6825. La probabilité d'absence de défaut est 1 − 0,022 = 0,978.

- $P(A_2|\bar{D})$ = 0,6825 ÷ 0,978.
- Le quotient vaut environ 0,69785.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2|\bar{D}) \approx 0{,}698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée T de bon fonctionnement d'un tube suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

La page originale indique le paramètre λ = 0,0001. Pour une loi exponentielle, l'espérance est l'inverse du paramètre : E(T) = 1/λ = 1/0,0001 = 10 000 heures. Cette valeur représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes fluorescents.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> E(T) = 10 000 heures, durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. Calculer, avec un arrondi à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

La formule fournie donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec $\lambda = 0{,}0001$ et $t = 8\,000$, on obtient :

```
P(T < 8 000) = 1 − e^(−0,0001 × 8 000) ≈ 0,5507.
```

La loi étant continue, les probabilités de $T < 8\,000$ et de $T \leq 8\,000$ sont égales.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$.

Question 3. Calculer, avec un arrondi à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée t est le complément de la probabilité de ne pas l'atteindre, soit $e^{-\lambda t}$. Avec $\lambda = 0{,}0001$ et $t = 10\,000$:

$$P(T > 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} \approx 0{,}3679.$$

On arrondit ensuite au centième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle est la fréquence de rivets conformes observée dans l'échantillon :

Rivets conformes	Effectif total	Fréquence
975	1 000	975 ÷ 1 000 = 0,975

Cette fréquence fournit l'estimation demandée de la proportion p.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Estimation ponctuelle : $\hat{p} = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p de rivets conformes, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La fréquence observée est f = 0,975 et l'effectif est n = 1 000. En appliquant la formule fournie, les bornes sont $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$, soit environ 0,965323 et 0,984677. L'arrondi au millième donne l'intervalle de confiance demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : [0,965 ; 0,985].

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de deux heures. Le coefficient est 2 pour la plupart des spécialités et 3 en Traitement des matériaux. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot, la production de tubes fluorescents et la conformité de rivets. Ils évaluent équations différentielles, analyse de fonctions, probabilités, loi exponentielle et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- Si $f(t)$ tend vers L lorsque t tend vers $+\infty$, la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$, où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier la solution particulière, puis utiliser la condition initiale pour déterminer la constante.
- Pour savoir si le chariot s'arrête, examiner la limite de sa vitesse et la comparer à zéro.
- Dans un arbre, distinguer les probabilités conditionnelles des probabilités d'intersection et appliquer la formule des probabilités totales.
- Respecter les arrondis demandés : au centimètre pour la distance, au centième pour les probabilités et au millième pour l'intervalle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot entre deux instants ?

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle considéré. Avec une primitive F de f, on calcule $F(t_1) - F(t_0)$, puis on exprime le résultat en mètres et on applique l'arrondi demandé.

Q : Comment déterminer si le chariot s'arrête à partir de la fonction vitesse ?

On étudie le comportement de la vitesse lorsque le temps tend vers l'infini. Si sa limite est nulle, elle tend vers zéro; si sa limite est strictement positive, le modèle ne décrit pas un arrêt complet.

Q : Comment organiser le temps pour cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, commencez par les questions maîtrisées et gardez quelques minutes pour vérifier unités et arrondis.

Q : Quels arrondis et éléments de présentation faut-il vérifier ?

Le sujet demande une distance arrondie au centimètre, des probabilités au centième et les bornes de l'intervalle au millième. Faites apparaître les étapes utiles, les unités et une interprétation lorsque la consigne la demande.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmse.fr/assets/annales/bts-mse/E2 - Mathématiques/2022/BTS MSE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers des Services à l : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.