Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

# Mathématiques

**Session 2022** • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement


1. **Modélisation de la vitesse et du freinage d'un chariot** (12 questions) — **Page 3**
2. **Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**


**Sujet officiel (PDF) :** https://btsmse.fr/assets/annales/bts-mse/E2 - Mathématiques/2022/BTS MSE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

# 1. Modélisation de la vitesse et du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine avance initialement à 20 m·s⁻¹ sur un axe horizontal avant d'être ralenti par un système de freinage. Sa vitesse f(t) est étudiée au moyen d'une équation différentielle, de l'analyse de sa fonction et d'un développement limité au voisinage de zéro.

## Partie A - Résolution d'une équation différentielle

**Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.**

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, où $k$ est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$, donc on obtient directement l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

**Question 1. b. Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞[ par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction $g$ est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant $g$ et sa dérivée dans le membre de gauche de $(E)$, on trouve $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'égalité étant vérifiée pour tout $t \geq 0$, $g$ est bien solution de $(E)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $(E)$.

**Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

Une solution particulière de $(E)$ est $g(t) = 5$. Les autres s'obtiennent en ajoutant à cette solution une solution de l'équation homogène associée, soit $ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$. On obtient ainsi toutes les solutions de $(E)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

**Question 2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. La condition initiale impose $f(0) = k + 5 = 20$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$, ce qui détermine la fonction recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

## Partie B - Étude de la fonction f

**Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t), lorsque t tend vers +∞, est égale à 5.**

On sait que $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $f(t) \to 15 \times 0 + 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

**Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe représentative C admet une asymptote, et en donner une équation.**

Comme $f(t)$ tend vers 5 lorsque $t \to +\infty$, la courbe représentative $C$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Son équation est donnée par cette limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

**Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t) pour tout t de [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante, de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

| $t$ | **0** | $+\infty$ |
|---|---|---|
| **Signe de $f'(t)$** | $-$ | $-$ |
| **Variation de $f$** | 20 | $\searrow$ 5 |

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f$ décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

**Question 3.** **Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?**

Le chariot s'arrête si sa vitesse atteint zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive et $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste donc positive et tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$, sans jamais s'annuler.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$ sans atteindre zéro.

**Question 4. a.** **Pour F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression étant égale à $f(t)$, la fonction $F$ est bien une primitive de $f$ sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$ : $F$ est une primitive de $f$.

**Question 4. b.** **La distance parcourue entre les instants t₀ et t₁ étant donnée par l'intégrale de f entre ces instants, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance est $d = F(1) - F(0)$. En utilisant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'arrondi au centimètre donne la valeur approchée demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

## Partie C - Étude locale

**Question 1.** **À partir de l'affichage du développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro, choisir l'unique expression correcte parmi les propositions et la recopier sans justification. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.**

La partie régulière affichée est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le reste d'un développement limité à l'ordre 2 s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc retenir la proposition qui contient ce terme de reste.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

**Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. En reportant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient son expression.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

## 2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie

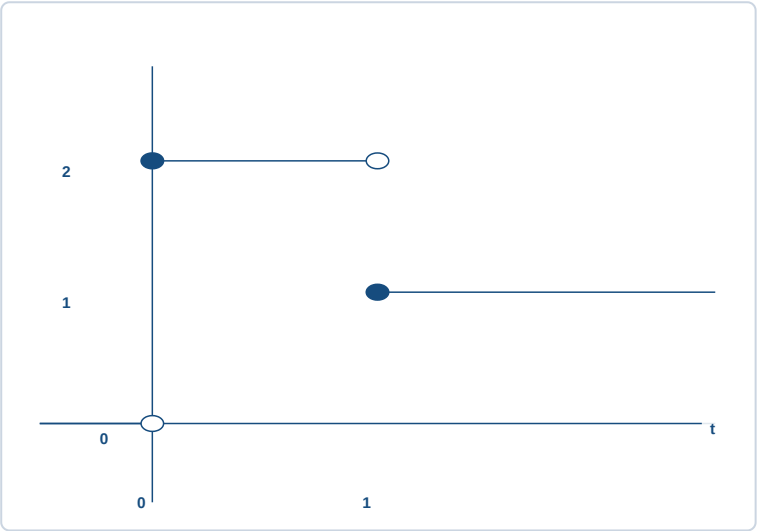
L'exercice étudie un système électrique dont le signal d'entrée est défini à l'aide de la fonction échelon unité et dont la fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). Les transformées de Laplace servent à déterminer le signal de sortie, ses expressions sur différents intervalles et sa représentation graphique.

### Partie A - Signal d'entrée

**Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t) = 2U(t) - U(t - 1).**

Comme $U(t) = 0$ pour $t < 0$ et $U(t) = 1$ pour $t \geq 0$, le signal vaut $0$ avant l'instant 0, puis $2$ jusqu'à l'instant 1 exclu. À $t = 1$, le terme $U(t-1)$ vaut déjà 1 : le signal vaut alors $1$.

**Courbe représentative de e(t)**




✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$e(t) = 0$ pour $t < 0$, $e(t) = 2$ pour $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ pour $t \geq 1$.

**Question 2. Déterminer E(p), la transformée de Laplace du signal d'entrée e(t).**

Par linéarité et d'après le formulaire, $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. On applique ces résultats à $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

## Partie B - Signal de sortie

**Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^(-p).**

La fonction de transfert vérifie $S(p) = H(p)E(p)$. En remplaçant $H(p)$ et le résultat de la partie A, puis en distribuant le facteur $1/(p+1)$, on obtient :

$$S(p) = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2 - e^{-p}}{p} = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

**Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).**

En mettant au même dénominateur, le numérateur se simplifie :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

**Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e^(-p) et de [1/(p + 1)]e^(-p).**

Les deux premiers résultats sont les transformées usuelles. Pour les deux suivants, le facteur $e^{-p}$ correspond à un retard d'une unité : on multiplie alors la fonction décalée par $U(t-1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

**Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Pour $0 \leq t < 1$, les fonctions retardées sont nulles. Il reste donc l'inverse de $2(1/p - 1/(p+1))$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $t \in [0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

**Question 5. a.** **On admet que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[. Calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.**

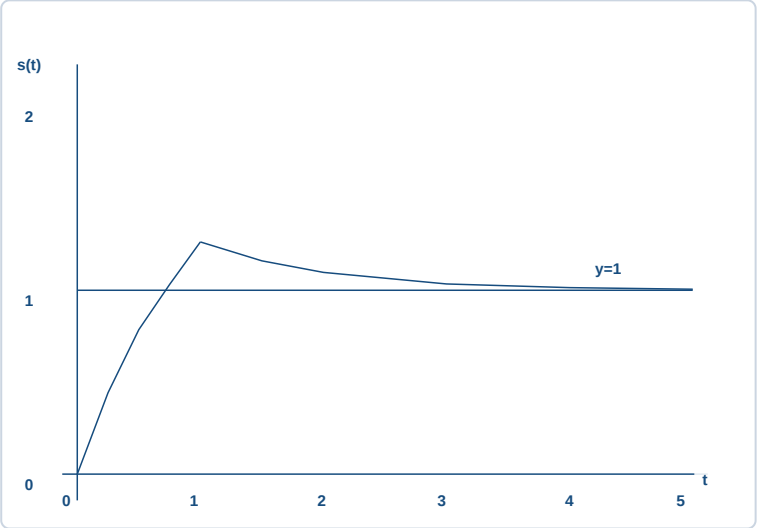
À $t = 1$, l'expression admise donne $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - 2/e$. Numériquement, cela vaut environ $1{,}264$, donc $1{,}3$ au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

**Question 5. b.** **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la courbe suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$, puis suit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Les deux expressions coïncident en $t = 1$, où $s(1) = 2 - 2/e$. La courbe croît jusqu'à cet instant, puis décroît vers l'asymptote horizontale $y = 1$.

**Courbe représentative de s(t)**




> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe part de $(0;0)$, atteint $(1;2-2/e)$, puis décroît vers $y = 1$.

**Question 5. c.** **Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Comme $e^{-t}$ tend vers 0 lorsque $t$ tend vers $+\infty$, le terme exponentiel s'annule à la limite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

**Bilan de l'épreuve :** Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB2, dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, mobilisant équations différentielles, étude de fonctions, intégrales, développements limités et transformées de Laplace.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière donne les solutions de l'équation avec second membre.
- Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, la limite en +∞ est 5 et la droite y = 5 est une asymptote horizontale.
- La distance parcourue entre $t_0$ et $t_1$ est l'intégrale de la vitesse : d = ∫ de $t_0$ à $t_1$ f(t)dt.
- Un décalage temporel de a dans le domaine causal correspond au facteur e^(-ap) en transformée de Laplace.

### Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir déterminé la solution générale de l'équation différentielle.
- Pour établir les variations, exploiter le signe de f' sur tout l'intervalle étudié.
- Pour calculer une distance, évaluer une primitive aux deux bornes et respecter l'unité et l'arrondi demandés.
- Avec un échelon retardé, appliquer le décalage dans la transformée inverse et distinguer les intervalles avant et après t = 1.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment déterminer la constante dans la solution de l'équation différentielle ?**

Écrivez d'abord la solution générale de l'équation avec second membre. Remplacez ensuite t par 0 et f(0) par 20. L'équation obtenue fixe la constante et fournit la fonction vitesse recherchée.

**Q : Comment savoir si le chariot s'arrête selon le modèle ?**

Étudiez la limite de la vitesse et ses variations. Ici, la vitesse décroît vers 5 $m \cdot s^{-1}$, valeur strictement positive. Elle ne s'annule donc pas et le modèle ne prévoit pas l'arrêt du chariot.

**Q : Comment organiser le temps pour cette épreuve ?**

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de 10 points. Repérez les questions indépendantes, notamment les trois parties de l'exercice 1, puis gardez du temps pour vérifier les unités, les courbes et les résultats numériques.

**Q : Le coefficient est-il le même pour toutes les spécialités du groupement ?**

Non. Le sujet indique un coefficient de 1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 pour Électrotechnique. Les deux exercices sont chacun notés sur 10 points.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://btsmse.fr/assets/annales/bts-mse/E2 - Mathématiques/2022/BTS MSE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
**Ressources BTS Métiers des Services à l :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.