Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MSE

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d’une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmse.fr/assets/annales/bts-mse/E2 - Mathématiques/2023/BTS MSE - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance f(t), en centimètres, entre le fond du meuble et le fond du tiroir est étudiée pendant la fermeture. Le sujet demande de résoudre une équation différentielle, d’étudier la fonction obtenue, d’exécuter un algorithme et de calculer une position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On résout l’équation du second degré en calculant son discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Comme $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes. La formule $r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, avec $a = 1$ et $b = 5$, donne les deux solutions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. À l’aide des solutions de l’équation caractéristique et du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

1. L’équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4.
2. D’après le tableau fourni, la solution générale est une combinaison des exponentielles associées aux racines : $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.
3. En remplaçant chaque racine, on obtient la solution générale sur l’intervalle considéré, où les constantes sont réelles.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation initiale, déterminer la distance f(0) et la vitesse f'(0) du tiroir.

Grandeur à l’instant initial	Traduction mathématique	Valeur
Distance OM	$f(0)$	20 cm
Vitesse de déplacement	$f'(0)$	-10 cm·s^{-1}

La distance est représentée par f, et sa vitesse instantanée par sa dérivée. Le signe négatif traduit le rapprochement des points.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En utilisant l'expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

La distance cherchée est la valeur de la fonction à l'instant $t = 2$. On substitue donc 2 à t dans l'expression donnée : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}$. L'expression exacte reste en centimètres. Le terme -4×2 donne l'exposant -8 dans le second terme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer, en justifiant, si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.**

La distance est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, et vaut initialement 20 cm. À 4 secondes :

- $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}4274$ cm ;
- cette distance est inférieure au seuil de 0,5 cm.

La continuité et la décroissance de f garantissent que le seuil est franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le tiroir est fermé avant 4 s, car $f(4) \approx 0{,}4274 < 0{,}5$ cm.

Partie B

Question 1.a. **À l'aide de la limite rappelée pour l'exponentielle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

> La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$.

Quand t tend vers $+\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Ainsi, chacune des exponentielles tend vers zéro. Les deux termes de $f(t)$ tendent donc vers zéro, et leur différence aussi.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **Déduire de cette limite que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et égale à zéro. Par définition, la courbe représentative d'une fonction qui admet une limite finie en $+\infty$ possède une asymptote horizontale dont l'ordonnée est cette limite. Ici, l'asymptote est donc l'axe des abscisses.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de la dérivée f'(t) pour tout t de l'intervalle [0 ; +∞[.

On dérive séparément les deux termes de f, en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Le facteur de la première exponentielle est -1, et celui de la seconde est -4. Il faut aussi tenir compte du signe négatif placé devant le second terme : sa dérivée est positive.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$, pour tout $t \geq 0$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Le sujet donne $f'(t) < 0$ sur l'intervalle : la fonction est donc strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut zéro.

t	**0**	$+\infty$
Variations de f	20	$\searrow$ 0

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

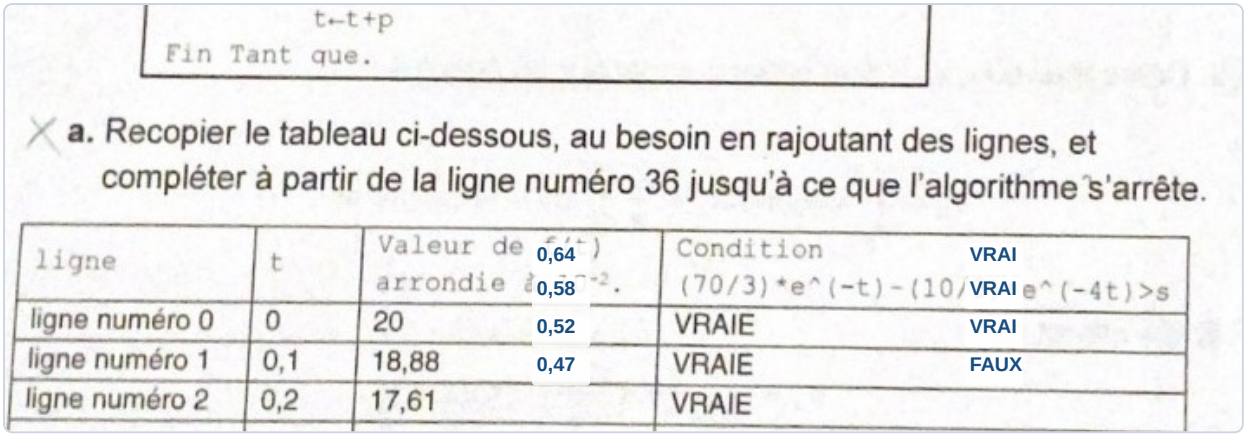
Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire. Indiquer les valeurs de t, les valeurs de f(t) arrondies au centième et le résultat du test, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque itération, t augmente de 0,1, puis le programme teste si $f(t) > 0{,}5$. Les valeurs arrondies au centième donnent :

Ligne	t	$f(t)$	**Test** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

Le test devient faux à la ligne 39 : l'algorithme s'arrête à cette ligne.

Tableau de l’algorithme complété



```
            t←t+p
Fin Tant que.
```

a. Recopier le tableau ci-dessous, au besoin en rajoutant des lignes, et compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu’à ce que l’algorithme s’arrête.

ligne	t	Valeur de $f(t)$ arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/ e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE

0,64 VRAI
0,58 VRAI
0,52 VRAI
0,47 FAUX

✓ RÉPONSE À RETENIR

L’algorithme s’arrête à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$ s.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l’exécution de l’algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l’exercice.

1. À $t = 3{,}8$, le test est vrai car $f(t) \approx 0{,}52 > 0{,}5$.
2. Après l’incrément de 0,1, à $t = 3{,}9$, le test est faux car $f(t) \approx 0{,}47 < 0{,}5$.

La valeur finale repère donc le premier dixième de seconde où la distance satisfait le critère de fermeture.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s : la distance est alors inférieure à 0,5 cm.

Question 4. La position moyenne m du tiroir sur l’intervalle [0 ; 4] est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer l’expression de m donnée dans le sujet.

En remplaçant $f(t)$ par son expression et en intégrant les deux exponentielles :

$$m = \frac{1}{4}\left[\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) - \frac{5}{6}(1 - e^{-16})\right].$$

En développant, le terme constant vaut $\frac{70}{12} - \frac{5}{24} = \frac{45}{8}$. Les termes exponentiels donnent respectivement $-\frac{35}{6}e^{-4}$ et $\frac{5}{24}e^{-16}$, ce qui établit l’expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16} \approx 5{,}5182$ cm.

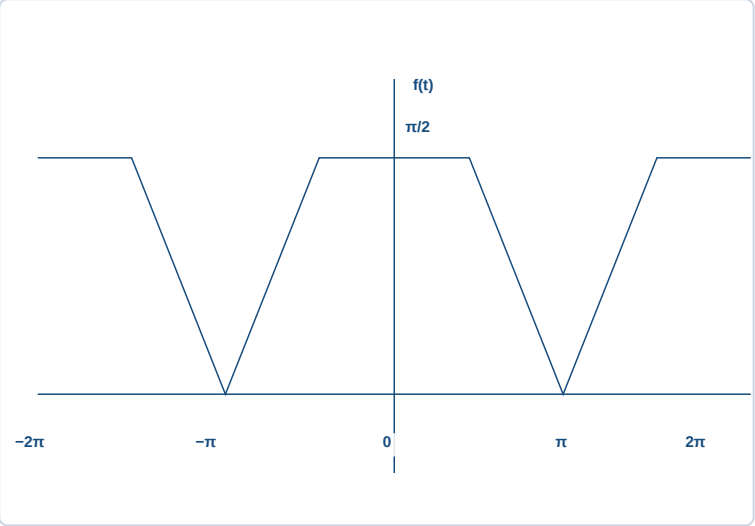
2. Série de Fourier d’une fonction périodique paire

On étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π], ainsi que sa représentation graphique et ses coefficients de Fourier. Les tâches portent sur une somme partielle, le choix de sa courbe et l’évaluation d’une approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l’intervalle [−2π ; 2π], en tenant compte de sa définition, de sa parité et de sa période.

Sur chaque période, la fonction vaut $\pi/2$ de $-\pi/2$ à $\pi/2$, puis descend linéairement jusqu’à 0 en π. La parité et la périodicité répètent ce motif : les minima sont en $-\pi$ et π, et les plateaux comprennent -2π, 0 et 2π.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé sur $[-2\pi; 2\pi]$: plateaux à $\pi/2$, minima nuls en $-\pi$ et π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le formulaire donne $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. La fonction f est paire et $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur l’intervalle symétrique $[-\pi; \pi]$ est nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation associée à une fonction de période T est $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ici, la période indiquée est $T = 2\pi$. Ainsi, $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.

Comme $T = 2\pi$ et f est paire, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. On sépare l'intégrale là où la définition de f change, en $t = \pi/2$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right).$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \dfrac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient a_n est égal à la somme des intégrales indiquées dans le sujet, en tenant compte des deux expressions de f sur [0 ; π].

Pour une fonction paire de période 2π, le formulaire donne $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, $f(t) = \pi/2$, puis sur $[\pi/2;\pi]$, $f(t) = \pi - t$. En séparant l'intégrale et en simplifiant le premier coefficient :

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt.$

Question 6. En utilisant l'expression admise de a_n, déterminer les valeurs exactes des coefficients a_1, a_2 et a_3.

On applique la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1, 2, 3$, les différences de cosinus valent respectivement $1, -2, 1$. Leur substitution dans la formule donne les trois coefficients exacts ci-dessous.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \dfrac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\dfrac{1}{\pi}, \quad a_3 = \dfrac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des résultats précédents l'expression de la somme partielle de Fourier $s_3(t)$ donnée dans le sujet.

Comme $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, la somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + a_1\cos(t) + a_2\cos(2t) + a_3\cos(3t)$. En y remplaçant les coefficients obtenus précédemment, on trouve l'expression demandée.

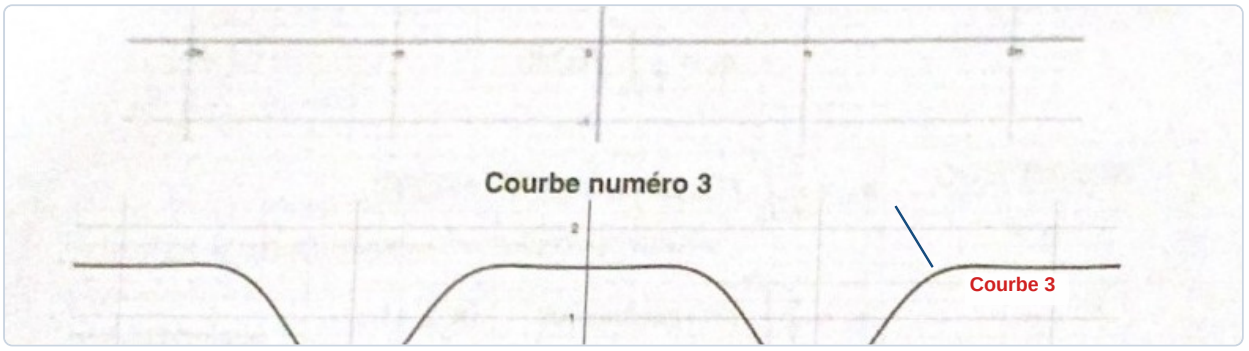
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

Question 8. Indiquer sans justification laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.

La courbe numéro 3 correspond à la somme partielle : elle reste proche du plateau de la fonction et présente des creux près de $t = -\pi$ et $t = \pi$.

Courbe représentant s_3



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

En utilisant $a_0 = \frac{3\pi}{8}$, $a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{\pi}$ et $a_3 = \frac{2}{9\pi}$, on obtient :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right].$$

On arrondit le résultat au 10^{-4} près.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **Sachant que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F², choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Recopier une seule réponse, sans justification.**

Le pourcentage d'erreur relatif est $\frac{|P-F^2|}{F^2} \times 100$. Avec $P \approx 1{,}64371784$ et $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$, l'erreur vaut environ $0{,}074\%$. Le choix proposé le plus proche est donc $0{,}1\%$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $0{,}1\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir et les séries de Fourier d'une fonction périodique, en évaluant calcul, raisonnement, étude graphique et interprétation.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent la forme de la solution générale.
- Pour $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, dériver chaque terme puis étudier le signe de f' pour établir les variations.
- Une fonction paire a des coefficients sinus b_n nuls ; les coefficients cosinus se calculent avec les formules de Fourier du sujet.
- La somme partielle $s_n(t)$ comprend le terme constant a_0 et les termes de Fourier jusqu'au rang n.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer les unités de distance et de vitesse, et tenir compte du signe négatif de la vitesse initiale.
- Dans l'algorithme, augmenter t de 0,1 à chaque tour et s'arrêter dès que le test de boucle est faux.
- Pour les coefficients de Fourier, respecter les intervalles de définition et les bornes des intégrales.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à F^2 et choisir une seule réponse au QCM.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment obtenir la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes déterminent la forme de la solution générale, combinaison de deux exponentielles. Les conditions initiales servent ensuite à fixer les constantes.

Q : Comment calculer les coefficients de Fourier dans cet exercice ?

La fonction est paire, donc ses coefficients sinus b_n sont nuls. Sa période est 2π, d'où $\omega = 1$. Calculez a_0 et les coefficients a_n avec les formules du sujet, en séparant les intervalles où la définition de f change.

Q : Comment gérer le temps et l'algorithme pendant l'épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et chacun des deux exercices vaut 10 points. Pour l'algorithme, partez de t = 0, ajoutez 0,1 à chaque tour et vérifiez le test à chaque étape. Gardez du temps pour interpréter le résultat.

Q : Quels éléments de méthode faut-il rendre visibles dans les réponses ?

Présentez les étapes utiles des démonstrations, les formules utilisées et les bornes des intégrales. Pour le tracé, respectez parité et périodicité. Pour le QCM final, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmse.fr/assets/annales/bts-mse/E2 - Mathématiques/2023/BTS MSE - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers des Services à l : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.