Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MÉTIERS DES SERVICES À L • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Non indiquée sur les pages fournies**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Évolution de la température de l'eau d'un spa** (12 questions) — **Page 3**

2. **Contrôles qualité et commercialisation de farine dans une minoterie** (12 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmse.fr/assets/annales/bts-mse/E2 - Mathématiques/2023/BTS MSE - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa

Après la coupure du chauffage, la température de l'eau d'un spa initialement à 38 °C est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L'exercice étudie son évolution, sa limite, ainsi qu'une alarme et un algorithme associés à des seuils de température.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle y' + 0,05y = 0 sur l'intervalle [0 ; +∞[.

On réécrit l'équation sous la forme $y' = -0,05y$. Une équation différentielle de la forme $y' = ay$ a pour solutions $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. Ici, $a = -0,05$, donc les solutions sont de la forme $Ce^{-0,05t}$. Leur dérivée vaut bien $-0,05Ce^{-0,05t}$, ce qui vérifie l'équation.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$y(t) = Ce^{-0,05t}$**, avec C réel.

Question 2. Déterminer, sur l'intervalle [0 ; +∞[, une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

On cherche une solution constante, donc on pose $y(t) = k$. Sa dérivée est nulle. En remplaçant dans l'équation, on obtient $0,05k = 1,25$, d'où $k = 1,25 / 0,05 = 25$. La fonction constante égale à 25 est donc une solution particulière sur tout l'intervalle demandé.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Une solution particulière constante est **y(t) = 25**.

Question 3. En déduire les solutions de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée. Celle-ci est $Ce^{-0,05t}$, et une solution particulière constante vaut 25. Ainsi, toutes les solutions sur $[0 ; +\infty[$ s'écrivent comme la somme de ces deux termes, où C est une constante réelle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$y(t) = Ce^{-0,05t} + 25$**, avec C réel.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

D'après la question précédente, $f(t) = Ce^{-0,05t} + 25$. La condition initiale donne $f(0) = 38$. Comme $e^0 = 1$, on a $C + 25 = 38$, donc $C = 13$. En remplaçant C par 13 dans la solution générale, on obtient l'expression annoncée pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On remplace t par 24 dans le modèle : $f(24) = 13e^{-0,05 \times 24} + 25$. Le calcul donne environ 28,9155 °C, soit **28,9 °C** au dixième près. Ainsi, selon le modèle, 24 heures après la coupure du chauffage, l'eau du spa est à environ 28,9 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(24) \approx 28,9$ °C après 24 heures.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout réel t de [0 ; +∞[.

La fonction est $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$. En dérivant l'exponentielle composée, on multiplie par la dérivée de son exposant, soit $-0,05$. Le terme constant 25 a une dérivée nulle. Ainsi, pour tout t de l'intervalle considéré, $f'(t) = 13 \times (-0,05)e^{-0,05t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et argumenter si ce sens est cohérent avec le contexte de l'exercice.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,05t}$ est strictement positive. Comme son coefficient dans $f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$ est négatif, on a $f'(t) < 0$ sur l'intervalle. La fonction f est donc strictement décroissante. C'est cohérent : après la coupure du chauffage, l'eau refroidit progressivement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante, conformément au refroidissement de l'eau après la coupure du chauffage.

Question 3. a). Déterminer la limite de la fonction f en +∞.

Quand t tend vers +∞, l'exposant $-0,05t$ tend vers -∞. On sait alors que $e^{-0,05t}$ tend vers 0. Dans l'expression $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$, le terme exponentiel tend donc vers 0 tandis que le terme constant reste égal à 25. La limite de f est ainsi 25.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 25$.**

Question 3. b). Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

La limite signifie que, lorsque le temps écoulé depuis la coupure devient très grand, la température de l'eau se rapproche de 25 °C. Cette valeur est précisément la température ambiante extérieure, supposée constante dans l'énoncé. Le modèle décrit donc une baisse progressive de la température de l'eau vers celle de son environnement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À long terme, l'eau du spa se rapproche de la température ambiante, soit **25 °C**.

Question 4. a). Une alarme se déclenche lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé après la coupure avant que l'alarme retentisse, puis donner la durée exacte et son arrondi à la minute.

Au seuil de déclenchement, on résout $13e^{-0,05t} + 25 = 36$, soit $e^{-0,05t} = 11/13$. En prenant le logarithme, on obtient $t = 20 \ln(13/11)$ heures, soit environ 3,341 heures. Cela correspond à environ 200,465 minutes, arrondies à 200 minutes. Comme l'alarme se déclenche sous 36 °C, elle retentit juste après le franchissement de ce seuil.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Durée exacte : $20 \ln(13/11)$ h.** À la minute près : **3 h 20 min**.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme qui augmente H d'une heure et recalcule T = 13e^(-0,05H) + 25 tant que T ≥ 34.

L'algorithme part de $H = 0$ et augmente H d'une unité tant que $T \geq 34$. Pour $H = 7$, $T \approx 34,16$ °C : la boucle continue. Pour $H = 8$, $T \approx 33,71$ °C : la condition n'est plus vérifiée et l'algorithme s'arrête. Il affiche alors la valeur de H.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L’algorithme affiche 8.

Question 4. c). Expliquer ce que l’algorithme permet de déterminer dans le contexte de l’exercice.

La variable *H* représente un nombre entier d’heures depuis la coupure. À chaque étape, l’algorithme calcule la température correspondante, puis s’arrête dès qu’elle devient strictement inférieure à 34 °C. Il détermine donc la première heure entière où l’eau est passée sous ce seuil, et non l’instant exact du franchissement entre deux heures.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L’algorithme donne la première heure entière où la température est inférieure à **34 °C**.

2. Contrôles qualité et commercialisation de farine dans une minoterie

Une minoterie contrôle l'extensibilité des pâtes et l'humidité du blé, puis conditionne sa farine en sacs dont le poids suit une loi normale. L'exercice porte aussi sur les probabilités qu'un artisan ou un boulanger industriel teste une nouvelle farine, et sur le nombre de clients qui l'ont testée dans un échantillon.

Partie A

Question 1. a). À partir des indices d'extensibilité mesurés sur cinq échantillons de pâte, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

Mesure	Calcul	Résultat
Moyenne	$(104+81+83+57+55)/5$	76 mm
Écart-type	$\sqrt{(28^2+5^2+7^2+(-19)^2+(-21)^2)/5}$	18,22 mm

Les écarts sont calculés par rapport à la moyenne de 76 mm. La somme de leurs carrés vaut 1 660 ; on divise par les cinq mesures, puis on prend la racine carrée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> La moyenne est de 76 mm et l'écart-type, arrondi au centième, est de 18,22 mm.

Question 1. b). En prenant un écart-type égal à 18 mm, vérifier qu'aucune des cinq valeurs n'est en dehors de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ], et conclure si le technicien doit procéder à un test sur cinq nouveaux échantillons.

On reprend la moyenne $\bar{x} = 76$ mm et l'écart-type imposé $\sigma = 18$ mm. Les bornes se calculent ainsi :

- $76 - 2 \times 18 = 40$ mm ;
- $76 + 2 \times 18 = 112$ mm.

Chaque mesure, de 55 à 104 mm, appartient à l'intervalle $[40 ; 112]$. Aucune n'est donc en dehors des limites du processus qualité.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Les cinq mesures sont dans l'intervalle $[40 ; 112]$ mm. Aucun test sur cinq nouveaux échantillons n'est nécessaire.

Question 2. Deux camions transportent respectivement 29 540 kg de blé à 12,4 % d'humidité et 14 540 kg à 14,1 %. Sachant que le taux d'humidité du blé mélangé dans un même silo doit être inférieur à 13 %, montrer que le technicien peut autoriser le déchargement des deux camions dans ce silo.

Le taux d'humidité du mélange est une moyenne pondérée par les masses. La masse d'eau est $29540 \times 0,124 + 14540 \times 0,141 = 5713,1$ kg, pour une masse totale de $29540 + 14540 = 44080$ kg. Le taux obtenu est donc $100 \times 5713,1/44080 \approx 12,96$ %. Il est strictement inférieur à la limite de 13 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le mélange contient environ 12,96 % d'humidité : le déchargement des deux camions dans le même silo est autorisé.

Partie B

Question 1. Le poids X d'un sac de farine suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'un sac ait une masse inférieure à 25 kg.

1. On centre et réduit la variable : $Z = (X - 25,2)/0,1$.
2. Pour la limite de 25 kg, $Z = (25 - 25,2)/0,1 = -2$.
3. La probabilité cherchée est donc $P(Z < -2)$, soit environ 0,02275 pour la loi normale centrée réduite.

Au millième près, la probabilité est 0,023.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un sac pèse moins de 25 kg est $P(X < 25) \approx 0,023$, au millième près.

Question 2. a). Donner un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égale à 0,95, à 10^-2 près.

Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs se trouvent dans un intervalle centré sur la moyenne de rayon $1,96\sigma$. Ici, $\sigma = 0,1$ kg, donc $h \approx 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg. Arrondi au centième, cela donne $h = 0,20$ kg. L'intervalle correspondant est approximativement $[25,00 ; 25,40]$ kg.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Un choix convenable est $h = 0,20$ kg, arrondi au centième.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique fournie d'une fonction densité, expliquer pourquoi cette courbe ne peut pas représenter la fonction de densité de la variable aléatoire X.

La moyenne de X est 25,2 kg et son écart-type vaut seulement 0,1 kg. Ainsi, environ 95 % des masses se situent entre $25,2 - 1,96 \times 0,1$ et $25,2 + 1,96 \times 0,1$, soit entre 25,004 et 25,396 kg.

- Sur le graphique, la courbe s'étend approximativement de 22,8 à 27,8 kg.
- Cette dispersion est bien trop grande pour un écart-type de 0,1 kg.

✓ RÉPONSE À RETENIR

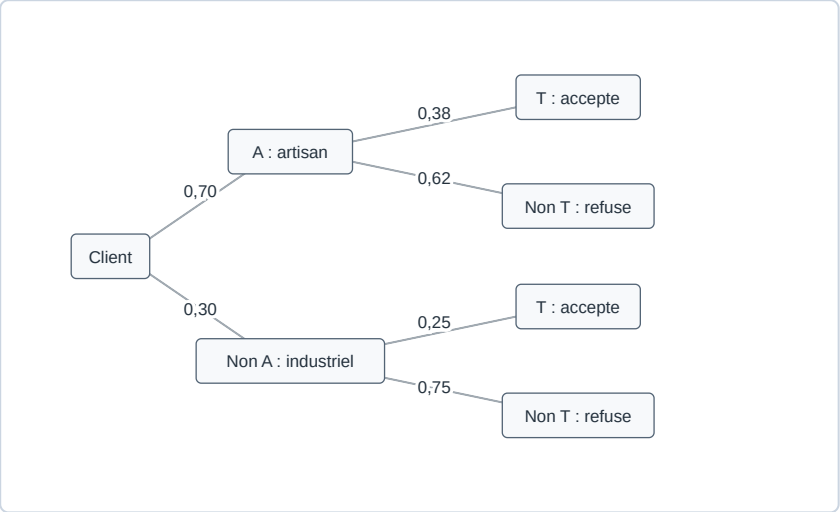
La courbe représentée est beaucoup trop étalée pour la variable X, dont l'écart-type est de 0,1 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation par un arbre pondéré en utilisant les événements A : « le client est un artisan boulanger » et T : « le client accepte de tester la farine La Romaine ».

On sépare d'abord les clients selon leur catégorie : $P(A) = 0,70$ et $P(\overline{A}) = 0,30$. Puis, pour chaque catégorie, on indique les probabilités d'accepter ou de refuser le test, qui sont complémentaires. Les valeurs des branches sont reportées sur l'arbre.

Arbre pondéré des clients et du test de La Romaine



A : le client est artisan boulanger ; T : le client accepte de tester La Romaine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'arbre distingue les artisans et les industriels, puis l'acceptation ou le refus du test.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client choisi soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

1. Le chemin correspondant à « artisan et accepte le test » est A, puis T.
2. On multiplie les probabilités des deux branches : $P(A \cap T) = P(A)P(T \mid A) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

Cette probabilité concerne l'ensemble des clients choisis au hasard, et non uniquement les artisans.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un client soit artisan boulanger et accepte le test est $P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Les événements « artisan et accepte » et « industriel et accepte » sont incompatibles et couvrent toutes les possibilités d'acceptation. On additionne donc les probabilités des deux chemins :

$$P(T) = P(A)P(T \mid A) + P(\overline{A})P(T \mid \overline{A}) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,341.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un client accepte de tester La Romaine est $P(T) = 0,341$.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer à 10^-3 près la probabilité que ce client soit un artisan boulanger.

On cherche la probabilité d'être artisan sachant que le test a été accepté. Par la formule des probabilités conditionnelles, $P(A \mid T) = P(A \cap T)/P(T)$. Avec les résultats précédents :

- $P(A \cap T) = 0,266$;
- $P(T) = 0,341$;
- $P(A \mid T) = 0,266/0,341 \approx 0,780$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Parmi les clients ayant testé la farine, la probabilité d'être artisan boulanger est environ 0,780.

Question 4. a). La variable Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer à 10^-3 près la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine La Romaine.

1. « Au plus 60 » signifie $Y \leq 60$.
2. Avec $Y \sim \mathcal{B}(200; 0,341)$, on additionne les probabilités binomiales de 0 à 60 inclus.
3. La probabilité obtenue, arrondie au millième, est 0,125.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que 60 clients au plus aient testé la farine est $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4. b). Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut $E(Y) = np$. Ici, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Cette espérance correspond au nombre moyen de clients testeurs dans des échantillons de 200 clients répétés ; elle n'impose pas que chaque échantillon en compte exactement 68,2.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> En moyenne, environ 68 clients sur 200 ont testé La Romaine : $E(Y) = 68,2$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRD1. La durée et le coefficient ne sont pas indiqués sur les pages fournies. Elle étudie le refroidissement de l'eau d'un spa, puis les contrôles qualité d'une minoterie, le poids des sacs de farine et l'acceptation d'un nouveau produit. Les compétences évaluées mobilisent équations différentielles, statistiques, probabilités, loi normale et loi binomiale.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre y' + ay = b, additionner la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière.
- Pour f(t) = 13e^(-0,05t) + 25, f'(t) = -0,65e^(-0,05t) : f décroît et tend vers 25 °C.
- Le taux d'humidité d'un mélange est la moyenne des taux pondérés par les masses correspondantes.
- Si Y suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors E(Y) = np et P(Y ≤ k) se calcule avec la probabilité cumulée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les précisions d'arrondi demandées et conserver les valeurs exactes durant les calculs intermédiaires.
- Pour le contrôle à deux écarts-types, comparer chacune des valeurs à l'intervalle fermé centré sur la moyenne.
- Dans l'arbre pondéré, distinguer les probabilités conditionnelles inscrites sur les branches des probabilités des chemins.
- Donner les unités et interpréter les résultats dans leur contexte, notamment les limites et les espérances.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle du spa ?

Résoudre d'abord l'équation homogène, puis chercher une solution particulière constante. La solution générale est leur somme. Utiliser ensuite la condition f(0) = 38 pour déterminer la constante et obtenir l'expression du modèle.

Q : Comment calculer le taux d'humidité des deux chargements mélangés ?

Multiplier chaque masse par son taux d'humidité, additionner les quantités d'eau obtenues, puis diviser par la masse totale. Comparer le taux du mélange au seuil strict de 13 % indiqué dans le cahier des charges.

Q : Que faire si la durée de l'épreuve n'apparaît pas dans les pages disponibles ?

La durée n'est pas indiquée sur les pages fournies. Ne la déduisez ni du code sujet ni du nombre de questions. Consultez la convocation ou les informations officielles de la session pour connaître la durée applicable.

Q : Quels éléments présenter pour justifier une réponse de probabilité ?

Identifier l'événement ou la variable, choisir la formule ou la loi adaptée et indiquer les paramètres utilisés. Présenter le calcul avec l'arrondi demandé, puis interpréter le résultat en lien avec les clients, les sacs ou les échantillons.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmse.fr/assets/annales/bts-mse/E2 - Mathématiques/2023/BTS MSE - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers des Services à l : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.